Inter-Amer. Trop. Tuna Comm.
Bulletin
2(6)

INTER-AMERICAN TROPICAL TUNA COMMISSION
COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL

Bulletin – Boletín
Vol. II, No. 6

A STUDY OF THE DYNAMICS OF THE FISHERY FOR YELLOWFIN TUNA IN THE EASTERN TROPICAL PACIFIC OCEAN

UN ESTUDIO DE LA DINAMICA DE LA PESQUERIA DEL ATUN ALETA AMARILLA EN EL OCEANO PACIFICO ORIENTAL TROPICAL

by — por

MILNER B. SCHAEFER

La Jolla, California
1957

INTER-AMERICAN TROPICAL TUNA COMMISSION
COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL

Bulletin – Boletín

Vol. II, No. 6

A STUDY OF THE DYNAMICS OF THE FISHERY FOR YELLOWFIN TUNA IN THE EASTERN TROPICAL PACIFIC OCEAN

UN ESTUDIO DE LA DINAMICA DE LA PESQUERIA DEL ATUN ALETA AMARILLA EN EL OCEANO PACIFICO ORIENTAL TROPICAL

by — por

MILNER B. SCHAEFER

La Jolla, California
1957

CONTENTS — INDICE

ENGLISH VERSION — VERSION EN INGLES

Page

INTRODUCTION 247

ACKNOWLEDGMENTS 247

BASIC DATA 247

MATHEMATICAL MODEL 248

Description of the model 248

Some implicit assumptions 251

ESTIMATION OF PARAMETERS 253

Effects of variation in $1/k_2$ 256

LINEARITY OF THE RELATIONSHIP BETWEEN $C_e/\overline{U}$ AND $\overline{U}$ 258

ESTIMATES OF AVERAGE POPULATION ABUNDANCE AND EQUILIBRIUM CATCH CORRESPONDING TO DIFFERENT VALUES OF FISHING EFFORT, AND CONFIDENCE LIMITS ON THE ESTIMATES 259

PRESENT STATUS OF THE FISHERY 260

FIGURES — ILUSTRACIONES 261

TABLES — TABLAS 266

SPANISH VERSION — VERSION EN ESPAÑOL

Página

INTRODUCCION 269

AGRADECIMIENTOS 269

DATOS BASICOS 270

MODELO MATEMATICO 270

Descripción del modelo 270

Algunas suposiciones implícitas 273

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS 276

Efectos de la variación de $1/k_2$ 279

LINEARIDAD DE LA RELACION ENTRE $C_e/\overline{U}$ Y $\overline{U}$ 282

ESTIMACIONES DEL PROMEDIO DE ABUNDANCIA DE LA POBLACION Y DE LA PESCA DE EQUILIBRIO CORRESPONDIENTES A DIFERENTES NIVELES DE ESFUERZO PESQUERO, Y COMPUTO DE LOS LIMITES DE CONFIANZA DE DICHAS ESTIMACIONES 282

ESTADO ACTUAL DE LA PESQUERIA 283

LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA 284

A STUDY OF THE DYNAMICS OF THE FISHERY FOR YELLOWFIN TUNA IN THE EASTERN TROPICAL PACIFIC OCEAN

by

Milner B. Schaefer

INTRODUCTION

The central problem of the staff of the Inter-American Tropical Tuna Commission is the determination of the effects of fishing on the populations of tunas in the Eastern Tropical Pacific Ocean, in order to estimate the relationship between fishing intensity and the sustainable yield of each tuna species at different levels of fishing intensity. On this basis we may estimate the maximum sustainable yield, and the fishing intensity corresponding thereto, and also determine the current condition of the fishery with respect to the condition of maximum harvest.

One method of arriving at such estimates is the analysis of statistics of fishing intensity and resulting catch over a series of years encompassing different levels of fishing intensity. Data of this sort have been compiled for both yellowfin tuna and skipjack for the period 1934 through 1954, and have recently been published by Shimada and Schaefer (1956). It was concluded by these authors that the intensity of fishing during this series of years had been sufficiently great to have a pronounced effect on the abundance of yellowfin tuna, and that during the years of most intense fishing the level of maximum sustainable catch had been approached.

In order to provide more exact estimates of the relation of fishing effort to population abundance and catch, the data of Shimada and Schaefer, plus the corresponding data for the year 1955, will be examined here in the light of some theory of population dynamics, the basic principles of which have been previously discussed by Schaefer (1954). Some extension of the theory is also involved.

ACKNOWLEDGMENTS

The basic data for this study were obtained from the detailed records of fishing operations and results provided through the cooperation of vessel masters and other members of the tuna fishing industry. The indispensable cooperation of these men is again gratefully acknowledged.

BASIC DATA

In this study we shall consider as a single, independent biological unit the yellowfin tuna supporting the fishery off the west coast of the Americas, extending from Baja California to northern Peru. That these fish are

distinct from the populations further to the westward in the Central Pacific and Southeast Polynesia is evidenced by morphometric data (Godsil and Greenhood 1951, Royce 1953, Schaefer 1952, 1955), by tagging results (Shimada and Schaefer 1956, and unpublished data) and by the changes of the population in response to changes in fishing effort (Shimada and Schaefer 1956, Broadhead 1957). Whether the population *within* the region of the American fishery is homogenous is, however, not yet demonstrated. The ensuing analysis is, to this extent, provisional.

Data on total catch are collected for the entire region of the fishery. Abundance is measured by the catch-per-unit-of-fishing-effort of a very large sample of the fleet of tuna clippers, which fish by the live-bait method throughout the whole range, the unit of measurement being the catch-per-day's-fishing of a standard size-category of vessel, having a fish-carrying capacity of 200 to 300 tons of frozen tuna. Total fishing intensity, in terms of equivalents of fishing days of a standard vessel, is calculated for the entire fishery by dividing the catch-per-standard-day's-fishing into the total catch by all vessels of all types. The details of the collection, compilation, and standardization of the data have been given by Shimada and Schaefer (1956) and need not be repeated here. In Table 1 the data for the years 1934 through 1954 have been recapitulated from Table 19 of that publication. The data for 1955, which have since been compiled in exactly the same manner, have been added to the table.

MATHEMATICAL MODEL

Description of the model

The mathematical model employed is essentially the same as that discussed by Schaefer (1954), with some modifications in notation. The theory is, however, also extended in application to provide estimates of all the essential constants from the catch data alone, without recourse to tagging data for estimating fishing mortality which was required in the earlier paper.

The basic concept is that to every value of magnitude of population of tuna of commercial sizes there corresponds, on the average, a certain ability of the population to increase in weight *(the rate of natural increase),* for all population magnitudes between zero and the maximum population which this sea area will support under average environmental conditions. The rate of natural increase is, of course, zero for zero population, and is also zero, on the average, when the limiting population size has been reached. Now if, at any level of population, the fishery takes exactly the natural increase, there will be no change in the population. If the fishery takes more than the natural increase, the population will diminish by the amount the natural increase, the population will be augmented. The annual catch of the excess catch. Similarly, if the fishery takes less than the amount of

which corresponds to the annual rate of natural increase has been termed the equilibrium catch, because the harvest of the fishery is in equilibrium with the growth potential of the population. This may be formulated as follows:

$$\Delta P = C_e - C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

where

ΔP is the change in total weight of the population of commercial sizes of fish during a year

C_e is the equilibrium catch (equivalent to the annual rate of natural increase)

C is the catch during the year

For the general relationship between population and equilibrium catch (or annual rate of natural increase) we have

$$C_e = k_1 \bar{P} f(\bar{P}) + \eta \bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

where,

$\bar{P}$ is the mean population during the year

k_1 is a constant

η is a random variable

$f(\bar{P})$ is some single valued function of $\bar{P}$ which is zero at the limiting population magnitude and increases with diminishing population. This is a "negative feedback" term which is necessary to describe the self-regulating property by which the rate of increase is regulated appropriately to the size of a restricted environment (Hutchinson, 1954).

Now the simplest assumption we can make about the form of $f(\bar{P})$ (Moran 1954) is that it is linear with $\bar{P}$, i.e.

$$f(\bar{P}) = L - \bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

where,

L is the limiting population magnitude

So that

$$C_e = k_1 \bar{P} (L - \bar{P}) + \eta \bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

It will be shown subsequently that this assumption appears to correspond adequately to the data for the yellowfin tuna over the range of population sizes so far observed. The simple linear relationships for the "feedback" term may not prove adequate, of course, over a wider range of population sizes, but there seems no reason to employ a more complex model than is required by the available data.

We now make the usual assumption that the catch-per-unit-of-effort is proportional to the magnitude of the population, i. e.:

$$U = k_2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

where U is the catch-per-unit-of-effort

k_2 is a constant (the instantaneous rate of fishing mortality per unit of fishing effort)

From this it immediately follows that

$$\overline{U} = k_2 \overline{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

and

$$\Delta U = k_2 \Delta P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

where $\overline{U}$ is the mean catch-per-unit-of-effort during a year

ΔU is change in catch-per-unit-of-effort during a year

Substituting in (1) and (4) and accumulating some constants for simplicity of notation, we obtain

$$C_e = C + 1/k_2 \, \Delta U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

and

$$C_e = a\overline{U}\,(M - \overline{U}) + \epsilon\overline{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

where a and M are constants and ϵ is a random variable, leading to

$$1/k_2 \frac{\Delta U}{\overline{U}} = a\,(M - \overline{U}) - \frac{C}{\overline{U}} + \epsilon \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

When $\Delta U = 0$ and $\epsilon = 0$ we have

$$\frac{C_e}{\overline{U}} = a(M - \overline{U}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

which has been termed the "line of equilibrium conditions", by Schaefer (1954). This describes the *average* relationship between fishing effort ($F = C/\overline{U}$) and population abundance ($\overline{U}$) when the annual catch is in equilibrium with the annual rate of natural increase.

ΔP may be estimated for a given year, i, as was done by Schaefer (1954), by

$$\Delta P_i = \frac{\overline{P}_{i+1} - \overline{P}_{i-1}}{2}$$

Correspondingly,

$$\Delta U_i = \frac{\overline{U}_{i+1} - \overline{U}_{i-1}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Equation (10), with ΔU estimated by (12), expresses a theoretical relationship among population abundance, measured by the average catch per day's fishing $(\bar{U})$, the total effort $(C/\bar{U} = F)$, and the change in population abundance (ΔU) during a year. To this model will be applied the data of Table 1 to provide estimates of the parameters for the yellowfin tuna fishery in the Eastern Pacific.

Some implicit assumptions

The simple law relating rate of natural increase of population to population size, given by (2), implies certain assumptions about fish populations which are to some degree unrealistic and which, if the degree of departure from reality be sufficiently great, limit its usefulness. Although it is believed that in the case of the fishery for the yellowfin tuna this is not a serious source of error, as will be brought out below, it is of value to consider these implicit assumptions in order to indicate some of the limitations on the general applicability of the model, and the need for some caution in its employment. Some of these matters have also been discussed by Gulland (1955) and Watt (1956).

There are two implicit assumptions about the fish population itself:

1) That the rate of natural increase responds immediately to changes in population density. That is, delayed effects of changes in population density on rate of natural increase, such as the effects of the time lag between spawning and recruitment of resulting progeny into the catchable stock, are ignored.

2) That the rate of natural increase at a given weight of population is independent of the age composition of the population.

Neither of these conditions is exactly fulfilled by populations of fishes, or other multicellular organisms. Certainly the effects of intraspecies competition on individuals between the egg and the age of entry into the catchable stock involve some time lag. There also may be some delayed effects of population density on mortality and growth among individuals of catchable sizes. With respect to the second assumption, it is known that the factors of fecundity, growth, and mortality are all to some degree age-specific as well as density-dependent, so that the age structure of the population as well as the total bio-mass enter into the potential for population growth.

It should be noted that if equation (2) is applied to data for steady states only, these assumptions are not necessary. If data were used for only those periods when the fishing effort and population were in steady-state equilibrium, the age structure of the population would be uniquely determined by its biomass. Also, since in the steady state the population during any year is, on the average, of the same size and age structure as during

any subsequent year, the effect of time-lag on recruitment, et cetera, is eliminated. Actual fisheries are, however, seldom in steady states, so we must deal with transient states, in which these effects appear.

It is important in this connection to note that the changes in fishing effort in commercial fisheries are often gradual, so that the displacement from steady state is not large. In the case of the yellowfin tuna, it may be seen from Table 1 that there have been fairly large changes in fishing effort and population abundance over a few years, especially at the beginning of World War II, immediately after the war, and again in the last years of the series. This fishery, however, depends on only a few age classes, of which the youngest is believed to be one year old. Consequently, the renewal of the population is very rapid in comparison with many fisheries of high latitudes which exploit a larger number of age groups, and where the age of entry into the fishery is several years. Therefore, even in the presence of moderately large changes in fishing effort, the displacement from the steady state is not great for the yellowfin tuna of the Eastern Pacific.

The facts that the yellowfin tuna enter the fishery at only one year of age, reach sexual maturity very early (some are probably mature at one year and most at two years of age), and have a very short average life span, imply that the time-lag between spawning and recruitment is small. Likewise, effects of changes in age composition, due to changes in fishing effort, will be of lesser importance than for species of greater life span.

The rate of natural increase of a fish population is determined not only by the magnitude and age structure of that population, but also by many environmental factors. Variation in these factors will cause departures from the rate of increase which would occur under average environmental conditions. In applying the model to the data from the fishery, we assume that the effects of variable environmental factors on recruitment, survival and growth are random, or at least that they are not correlated with population changes due to changes in fishing effort, so that they may be averaged out. In other words, we assume that the mathematical expectation of ϵ in equation (10), (which includes the effects of environmental variations as well as various types of measurement errors) is zero.

Variations in the fishes' environment may also affect their behavior so as to make them more or less accessible to capture. It is, again, implicitly assumed in the application that effects of environmental factors on catchability of the population are random, or at least uncorrelated with changes in fishing effort, so that the mathematical expectation of k_2 remains the same for different levels of fishing effort.

It may happen, of course, that the important factors of the environment may change in a cyclic fashion, that the cycle is long with respect to the series of data at hand, and that the fishing effort is, fortuitously or otherwise, correlated with the environmental changes. In this event we

should be led erroneously to ascribing changes in the population to changes in fishing effort when such is not, in fact, true. In the case of the yellowfin tuna, while this is not impossible, it seems unlikely in view of the fact that we have had sizable changes in fishing effort in the 1940's, as a result of the effects of the war, and again in 1954 and 1955 as a result of competition with foreign imports. It is improbable that the associated changes in population abundance are, in both cases, due to environmental variations which, accidentally, occurred at these same times.

Finally, in applying the model to the data, it is necessary that the changes in population associated with changes in fishing effort be sufficiently great in relation to the variations due to other causes to permit a usefully reliable determination of the parameters in equation (10). In other words, in the terminology of information theory, (Wiener 1948, page 78) the message signal must be sufficiently large with respect to the background noise to yield a useful amount of information.

ESTIMATION OF PARAMETERS

From equation (10) we have, for any year, i,

$$1/k_2 \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} + \epsilon \quad . \quad . \quad (13)$$

ΔU_i being estimated by (12)

Summing over n years, we have for the expected sum

$$1/k_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = \sum_{i=1}^{n} a(M - \bar{U}_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\bar{U}_i} . \quad (14)$$

since the expectation of $\sum\epsilon$ is zero.

This is equivalent to

$$1/k_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = naM - a \sum_{i=1}^{n} \bar{U}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\bar{U}_i} . \quad (15)$$

In Table 1 are tabulated the values of C, $\bar{U}$, $C/\bar{U}$, ΔU, and $\Delta U/\bar{U}$ for each year of our series. The series of values of $\bar{U}$ and $C/\bar{U}$ are also shown graphically in Figure 1, and the series of values of C and $C/\bar{U}$ are shown in Figure 2.

Since positive values of ΔU are, on the average, associated with catch less than the equilibrium catch for the corresponding value of $\bar{U}$, and conversely, we may also write, corresponding to (14) the equation:

$$1/k_2 \sum_i \left| \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} \right| = \sum_i \left[a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} \right]_{\Delta U_i > 0} - \sum_i \left[a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} \right]_{\Delta U_i < 0} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

That is when we sum the absolute values of $\frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i}$ on the left hand side, on the right hand side we *add* $\left[a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} \right]$ for years when ΔU_i is positive and *subtract* this quantity when ΔU_i is negative.

In order to estimate the parameters of the model for the yellowfin tuna data of Table 1, we have employed equations (15) and (16) in a method of successive approximations.

Computing the sums for (15) for the two periods 1935-1944 and 1945-1954 we obtain:

$$\left.\begin{aligned} 1/k_2\,(-.11520) &= 10\,aM - a(100{,}289) - 77{,}290 \\ 1/k_2\,(-.37665) &= 10\,aM - a(\ 75{,}700) - 234{,}242 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Since in each period the *net* change in $\Delta U/\bar{U}$ was small, we have, as a first approximation, neglected the terms on the left side of these equations and solved for a and M, obtaining

$$a = 6.38301$$
$$M = 11{,}239$$

With these values of a and M, we now compute the terms of equation (16), obtaining, for a first approximation to $1/k_2$,

$$1/k_2\,(2.11843) = 53{,}940$$
$$1/k_2 = 25{,}462$$

Substituting this value of $1/k_2$ into (17), we obtain a second approximation to a and M

$$a = 6.11229$$
$$M = 11{,}246$$

With the new values of a and M we again compute the terms of equation (16) and solve for $1/k_2$, obtaining, as the second approximation:

$$1/k_2 = 26{,}277$$

Continuing this procedure, the series of successive approximations tabulated in Table 2 are obtained.

It may be seen that the approximations converge very rapidly. We obtain as our best estimates of the values of the parameters:

$$a = 6.10366$$
$$M = 11{,}246$$
$$1/k_2 = 26{,}275$$

For the line of equilibrium conditions, equation (11) relating fishing effort to average population density when the catch is in equilibrium with the rate of natural increase, we have

$$F = \frac{C_e}{\bar{U}} = 6.10366\ (11{,}246 - \bar{U}) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

It immediately follows that

$$C_e = 6.10366\ (11{,}246 - \bar{U})\ \bar{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

expressing the relationship between population density and average equilibrium catch.

Also,

$$C_e = \frac{F}{6.10366}\ (6.10366 \times 11{,}246 - F)$$

or $$C_e = .16384\ (68{,}641 - F)\ F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

expressing the relationship between fishing effort and average equilibrium catch.

These functional relationships are shown graphically in Figure 1 by the broken line labelled "estimated line of equilibrium". On this graph, the abscissae indicate values of F or $C/\bar{U}$, while the ordinates indicate values of $\bar{U}$. The equilateral hyperbolae indicate values of total catch, corresponding to the products of the ordinates and abscissae; the values of total catch for which the hyperbolae have been drawn are labelled at the ends of these hyperbolae at the top of the graph. Values of average equilibrium catch are given by the intersections of the broken line with the hyperbolae for the corresponding values of F or $\bar{U}$.

Since the values of C for which the hyperbolae have been computed do not form a linear series, it is difficult to interpolate by eye between them. In order, therefore, to permit the relation between fishing effort and average equilibrium catch to be more easily visualized, there has been plotted, as a broken line, in Figure 2 the relationship (20), together with the observed values of fishing effort and total catch for the series of years 1934-1955.

It may be seen from the equations (18) to (20), and from Figures 1 and 2, that this application of the model to the yellowfin tuna data indicates that the maximum average annual equilibrium catch is about 193 million pounds, and corresponds to an average annual fishing intensity of 34,300 days and to an average catch-per-unit-of-effort of 5623 pounds per standard-day's-fishing.

Effects of variation in $1/k_2$

The constant k_2, estimated above, is the instantaneous rate of fishing mortality per unit of fishing effort. With $1/k_2 = 26{,}275$, we have $k_2 = 38.059 \times 10^{-6}$. For a fishing effort of 25,000 days, which is about the level obtaining in recent years, this would indicate an instantaneous fishing mortality rate of 0.9515, corresponding to an annual fishing mortality rate of 0.614.

There arises the question of the precision with which the constant $1/k_2$ has been estimated, and what effect this has on the determination of the other parameters of the equation of the model. In order to examine this, we have *assumed* a series of values of $1/k_2$, corresponding to annual fishing mortality rates (at 25,000 days' fishing) ranging from 0.300 to 0.900, and have computed the other constants of the model. In Table 3 are shown the assumed values of the constant $1/k_2$, and the corresponding rates of instantaneous and annual fishing mortality at 25,000 units of effort.

The method of computation is similar to that given by Schaefer (1954). For a given value of $1/k_2$ we compute, for each year, the value of $\Delta P = 1/k_2 \Delta U$. From equation (1) we then obtain C_e for each year, by

$$C_e = C + \Delta P$$

Dividing C_e by $\bar{U}$ for each year, we obtain the series of values of $C_e/\bar{U}$. To the series of values of $C_e/\bar{U}$ and $\bar{U}$ for the several years, we fit an equation of the form

$$F = \frac{C_e}{\bar{U}} = a(M - \bar{U})$$

or

$$F = \beta \bar{U} + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

where

$$\beta = -a$$
$$\alpha = aM$$

This may be illustrated for the case $1/k_2 = 26{,}275$ (the value of this constant estimated in the preceding section). In Table 4 are shown the calculations of C_e and $C_e/\bar{U}$ for each year. The values of $\bar{U}$ and $C_e/\bar{U}$ are also plotted in Figure 3.

In fitting an equation of the form of (21) to these data, it should be borne in mind that we wish to obtain estimates of the parameters of the functional, or structural, relationship between the two variables, where both are subject to random errors. This, as shown by Wald (1940), Bartlett (1949), and others is not the same problem as the problem of predicting one variable by means of the other. In the latter case, it is appropriate to employ the mean square regression of one variable on the other, but it is not necessarily appropriate for finding the structural relationship.

For estimating the parameters of the functional relationship, Wald (1955) proposed a method which consists of dividing the data into two groups and finding the slope of the line passing through the mean coordinates of the two groups. The functional relationship is taken as the line with this slope which passes through the mean coordinates of all the points.

Bartlett (1949) presented a modification of Wald's method, having the advantage of greater accuracy. This consists of dividing the n points into three groups, the equal numbers k in the two extreme groups being chosen to be as near $n/3$ as possible. The join of the mean coordinates for the two extreme groups is used to determine the slope. The functional relationship is the straight line with this slope passing through the mean coordinates of all the points.

We have followed Bartlett's procedure. The two extreme groups of seven points each were taken as the points having the seven highest and the seven lowest values of $C_e/\bar{U}$. The equation for the resulting line has estimated values of the two parameters:

$$\alpha^* = 68{,}505 \qquad \beta^* = -6.0884$$

so that $M^* = 11{,}252$

For this assumed value of $1/k_2$ we have, then, for the functional relationship:

$$\frac{C_e}{\bar{U}} = 6.0884\ (11{,}252 - \bar{U}) \qquad (22)$$

or

$$\bar{U} = .16425\ (68{,}505 - \frac{C_e}{\bar{U}})$$

This line is plotted on Figure 3.

It may be seen, by comparison with (18), that this relationship is nearly identical with that obtained in the preceding section.

Assuming the values of $1/k_2$ tabulated in Table 3, each in turn, we have followed the same procedure as shown by the above example in computing estimates of α^* and β^* for the corresponding functional relationships. The values of these estimated parameters are tabulated in Table 5. The lines representing these relationships are shown in Figure 4, each line being labelled with the value of f (annual fishing mortality rate at 25,000 units of effort) corresponding to the assumed value of $1/k_2$. The lines for $f = 0.614$ and $f = 0.800$ are not shown, because they both fall between the lines for $f = 0.600$ and $f = 0.700$, which are themselves very near to each other.

In the last two columns of Table 5 are also shown the value of maximum average equilibrium catch, and the fishing intensity corresponding to maximum average equilibrium catch, for each of the assumed values of fishing mortality rate.

It may be seen from Figure 4 and Table 5 that, over the range of values of $1/k_2$ corresponding to annual fishing mortality rates (at 25,000 units of effort) between about 0.6 and 0.8, there is little variation in the values of the parameters of the line of equilibrium conditions, and all provide rather similar estimates of the level of maximum average equilibrium catch, and of the level of fishing effort corresponding thereto. It would seem, therefore, that over this range of values of $1/k_2$ there is little variation in the computed values of the other parameters. With assumed values of annual fishing mortality rate below 0.6, however, the values of the parameters of the line of equilibrium conditions change quite rapidly.

The degree of scatter of the points about the line of equilibrium conditions in each case, may be judged from the "variance" $(s^2_{n-3}\beta)$ computed from the formulae of Bartlett on page 209 of his paper. These values are tabulated in the sixth column of Table 5. Now, it is reasonable to expect that the scatter of points $(C_e/\bar{U}, \bar{U})$ will be smallest when the value of $1/k_2$ is near the true value and will become increasingly large as our assumption departs from reality. It may be seen from the tabulated values that the smallest variance was obtained with $f = 0.8$, and did not change greatly over the range $f = 0.6$ to $f = 0.8$. With values of f below 0.6, the calculated variance is very greatly increased, and it also increases substantially at $f = 0.9$.

It appears reasonable to conclude that (1) the annual fishing mortality rate (at 25,000 units of effort) probably lies somewhere between 0.6 and 0.8 and (2) over this range of values, the values of the other parameters are not much affected by errors in the determination of $1/k_2$.

Our estimate, then, of $1/k_2 = 26{,}275$ should be regarded as being not precise, but this lack of precision makes practically no difference to the estimate of the parameters of the line of equilibrium conditions.

LINEARITY OF THE RELATIONSHIP BETWEEN $C_e/\bar{U}$ AND $\bar{U}$

We have (page 249) in our mathematical model assumed a linear relationship between fishing effort and population abundance, on the average, for steady-state equilibrium.

In order to verify the validity of this assumption over the range of values of fishing effort observed, we have considered the series of values of $\bar{U}$ and $C_e/\bar{U}$, taking $1/k_2 = 26{,}275$ (i. e. the points of Figure 3). Applying the "t" test given by Bartlett (1949, page 211) it was found that the points are adequately fitted by a linear functional relationship. There seems to be, then, no reason to employ a more complex model, at least over the range of values of fishing effort and abundance so far observed.

ESTIMATES OF AVERAGE POPULATION ABUNDANCE AND EQUILIBRIUM CATCH CORRESPONDING TO DIFFERENT VALUES OF FISHING EFFORT, AND CONFIDENCE LIMITS ON THE ESTIMATES

In the foregoing we have been concerned with determining from the data of Table 1 the values of the constants in equation (11) which best represent the functional relationship among fishing effort, average abundance, and average catch, when the annual catch is in equilibrium with the rate of natural increase. A somewhat different problem is: for specified values of fishing effort to predict the average abundance and average catch under equilibrium condition.

For the latter problem, as noted by Wald (1940) and Bartlett (1949), it is appropriate to employ the least squares regression of $\bar{U}$ on $C_e/\bar{U}$. We have, therefore, fitted to the points of Figure 3 (Table 4) the mean square linear regression, obtaining

$$\bar{U} = 0.15670\ (71{,}081 - C_e/\bar{U}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

which differs a little from the estimated functional relationship. This line is also shown on Figure 3.

The standard error of estimate (standard deviation from regression) is 1,477 pounds.

Confidence limits on the estimate of the mean value of $\bar{U}$, given the fishing effort $(C_e/\bar{U})$, have been calculated, for the 90% confidence level, according to the procedure of Cramér (1946, page 550). The confidence limits are shown also on Figure 3.

For any chosen value of fishing effort, the expected equilibrium catch, with corresponding confidence limits, may be read off Figure 3 by means of the equilateral hyperbolae, which indicate the products of the values of the ordinates and abscissae. Since, however, the values of total catch shown by the hyperbolae of Figure 3 do not form a linear series, it is difficult to interpolate by eye between them. We have, therefore, also prepared Figure 5, which shows the values of estimated equilibrium catch, and the corresponding 90% confidence limits, for values of fishing effort on the horizontal axis. On the same Figure are shown the values of the actual fishing effort and catch for each year of our series.

It may be seen from Figure 5, that the estimated maximum average equilibrium catch of 198 million pounds corresponds to a fishing intensity of 35,540 standard days' fishing. The maxima of the lower and upper 90% confidence limits are about 176 million pounds and 221 million pounds, respectively, and occur at slightly lower and higher values of fishing effort.

PRESENT STATUS OF THE FISHERY

It may be seen from the foregoing analyses that we may expect the maximum average equilibrium catch of yellowfin tuna to be obtained with about 35,000 standard days' fishing effort, and to be in the vicinity of 195 million pounds. This amount of fishing effort was approached in 1950, 1952, and 1953. In 1954 and 1955, however, the fishing effort decreased markedly, due to economic circumstances. Data are not yet complete for 1956, but from information so far tabulated it appears that the effort was in the vicinity of 25,000 standard days. With the fleet now in being, it is unlikely that, even with full operation, the intensity can reach 35,000 standard days during the next year.

It would appear, therefore, that the current level of fishing effort is somewhat below that corresponding to maximum average equilibrium catch, and is likely to remain so in the immediate future.

It should be noted that the fitted lines drawn in Figures 1, 2, 3, and 5 are extrapolated somewhat beyond the range of the data. In order to verify the validity of these extrapolations, i.e. the applicability of the model developed herein at higher levels of fishing effort, it will be necessary to have observations of fishing effort, and resulting catch, at levels higher than those yet observed.

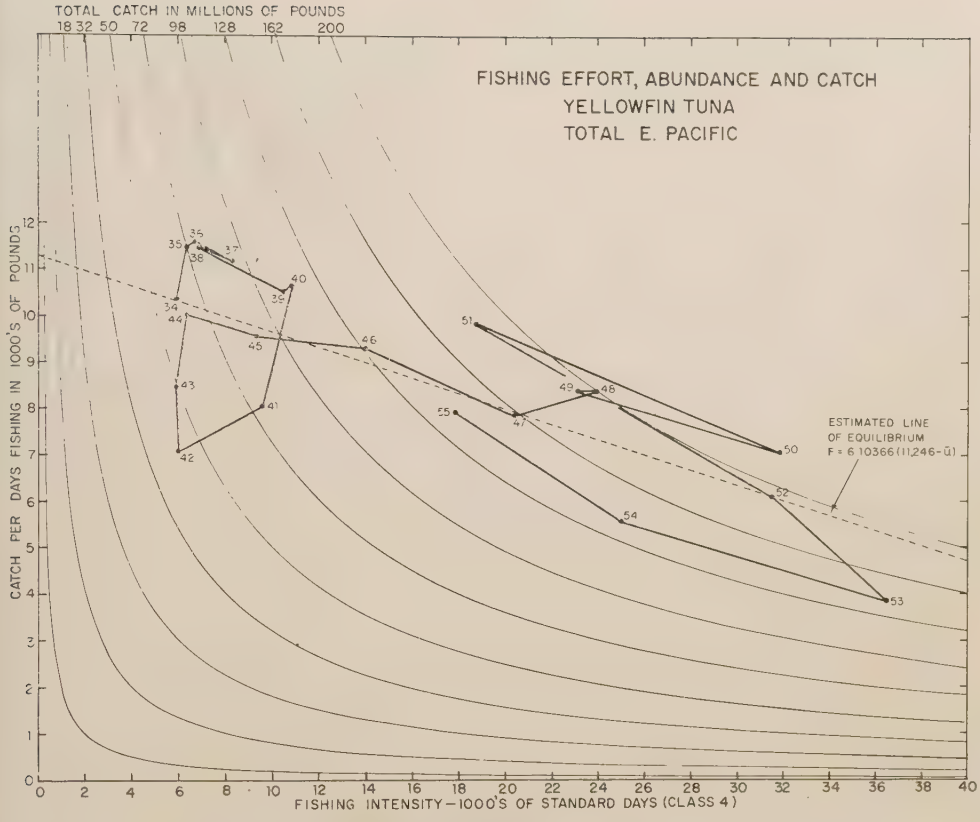
TOTAL CATCH IN MILLIONS OF POUNDS
18 32 50 72 98 128 162 200
FISHING EFFORT, ABUNDANCE AND CATCH
YELLOWFIN TUNA
TOTAL E. PACIFIC
CATCH PER DAYS FISHING IN 1000'S OF POUNDS
FISHING INTENSITY—1000'S OF STANDARD DAYS (CLASS 4)
ESTIMATED LINE
OF EQUILIBRIUM
F = 6.10366(11.246-U)

Figure 1. Relationships among fishing intensity, abundance and total catch. Points connected by solid line indicate actual values for each year 1934-1955. Broken line is estimated functional relationship between fishing intensity and average abundance under equilibrium conditions.

Figure 1. Relaciones entre la intensidad de la pesca, la abundancia y la pesca total. La línea continua une los valores realmente observados en cada año durante el periodo 1934-955. La línea a trazos representa la estimación de la relación funcional entre la intensidad de la pesca y la abundancia medio, en condiciones de equilibrio.

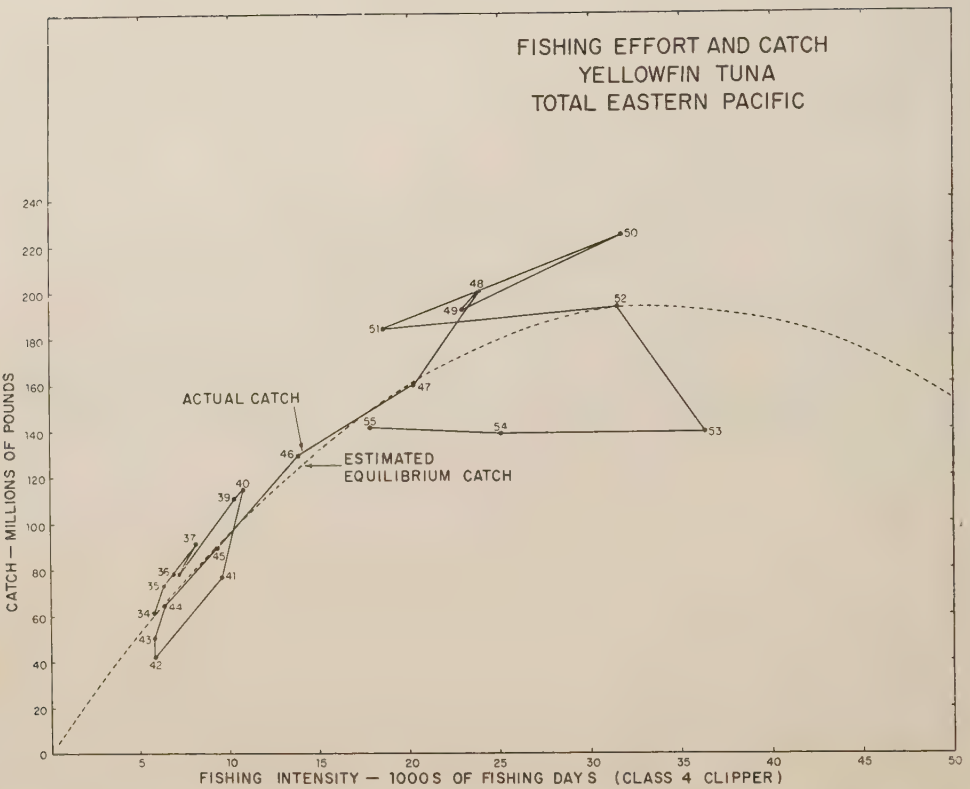

Figure 2. Relationship between fishing intensity and total catch. Points connected by solid line indicate actual values for each year 1934-1955. Broken line is estimated functional relationship between fishing intensity and average equilibrium catch.

Figura 2. Relación entre la intensidad de la pesca y la pesca total. La línea continua une los valores realmente observados en cada año de 1934 a 1955. La línea a trazos representa la relación funcional entre la intensidad de la pesca y la pesca media de equilibrio.

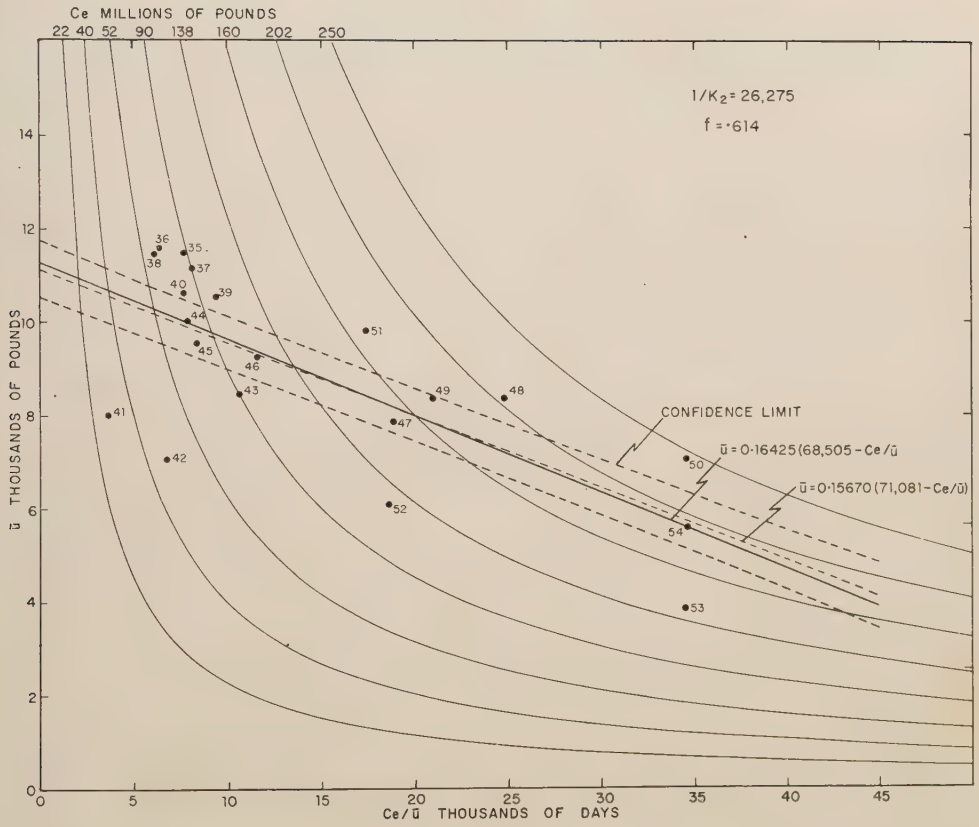

Figure 3. Relationships among fishing intensity, abundance, and equilibrium catch, assuming $1/k_2 = 26{,}275$. Points indicate values computed for each year 1935-1954. Solid line is estimated functional relationship between fishing intensity and average abundance under equilibrium conditions. Broken lines indicate the values of average abundance estimated for given values of fishing intensity, with the 90% confidence limits on the estimates.

Figura 3. Relaciones entre la intensidad de la pesca, la abundancia, y la pesca de equilibrio, suponiendo $1/k_2 = 26{,}275$. Los puntos corresponden a los valores computados para cada año de la serie 1935-1954. La línea continua representa la estimación de la relación funcional entre la intensidad de la pesca y la abundancia media en las condiciones de equilibrio. Las líneas a trazos representan los valores de la abundancia media estimados para determinados valores de la intensidad de la pesca, con los límites de confianza del 90 por ciento para las estimaciones.

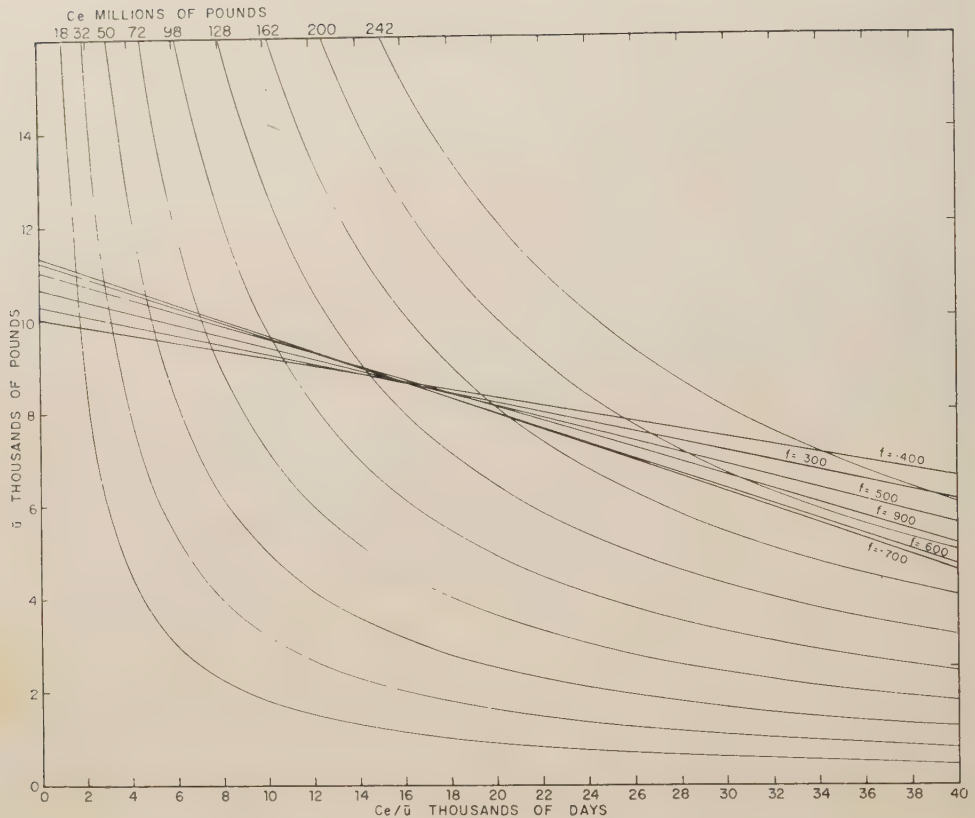

Figure 4. **Lines of equilibrium conditions calculated for different assumed values of annual rate of fishing mortality (at 25,000 standard days' fishing). Lines for $f = 0.614$ and $f = 0.800$ not shown (see Table 5); both fall between lines for $f = 0.600$ and $f = 0.700$.**

Figura 4. **Líneas de condiciones de equilibrio calculadas para diferentes valores supuestos de tasas de mortalidad anual por pesca (al nivel de los 25,000 días de pesca estándar). Las líneas para $f = 0.614$ y para $f = 0.800$ no han sido representadas (Véase la Tabla 5); una y otra caerían entre las líneas para $f = 0.600$ y $f = 0.700$.**

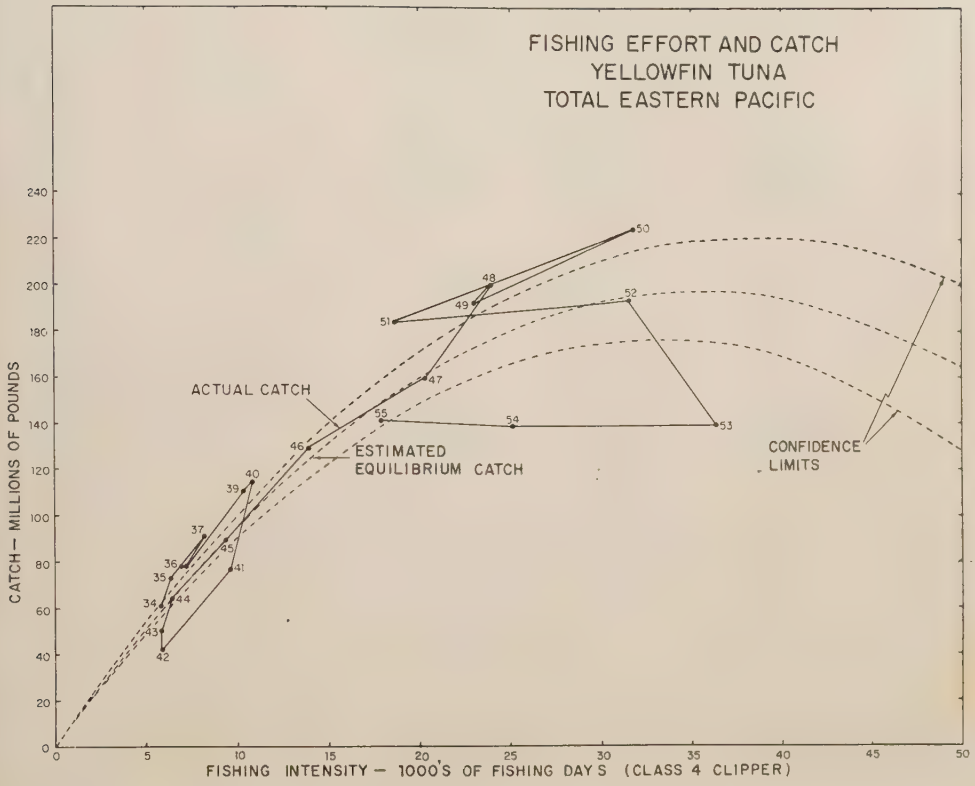

Figure 5. Average equilibrium catch predicted for given values of fishing intensity, with 90% confidence limits (broken lines), together with actual values of effort and catch for the years 1934-1955 (points connected by solid line).

Figura 5. Promedios de pescas en equilibrio pronosticadas para predeterminados valores de la intensidad de la pesca, con límites de confianza del 90 por ciento (líneas a trazos), además de los valores actuales del esfuerzo y de la pesca para el período 1934-1955 (línea continua).

TABLE 1. Total Eastern Pacific catch of yellowfin tuna, catch per standard day's fishing, and calculated relative fishing intensity.

TABLA 1. Pesca total de atún aleta amarilla en el Pacífico Oriental, pesca por día de pesca estándar, y valores calculados de la intensidad relativa de la pesca.

Year	Eastern Pacific total catch (in 1000's of pounds) C	Catch per standard day's fishing (in pounds/class 4 day) $\bar{U}$	Calculated intensity (in class 4 days) $F = C/\bar{U}$	ΔU	$\frac{\Delta U}{\bar{U}}$
Año	**Pesca total Pacífico Oriental (en miles de libras)** C	**Pesca por día estándar de actividad (libras/día/clase 4)** $\bar{U}$	**Intensidad calculada (días de la clase 4)** $F = C/\bar{U}$	ΔU	$\frac{\Delta U}{\bar{U}}$
1934	60,913	10,361	5,879		
1935	72,294	11,484	6,295	+ 605.0	+.05268
1936	78,353	11,571	6,771	— 184.0	—.01590
1937	91,522	11,116	8,233	— 54.0	—.00486
1938	78,288	11,463	6,830	— 294.0	—.02565
1939	110,417	10,528	10,488	— 427.0	—.04056
1940	114,590	10,609	10,801	—1255.0	—.11830
1941	76,841	8,018	9,584	—1784.5	—.22256
1942	41,965	7,040	5,961	+ 211.5	+.03004
1943	50,058	8,441	5,930	+1489.5	+.17646
1944	64,094	10,019	6,397	+ 535.5	+.05345
1945	89,194	9,512	9,377	— 363.5	—.03821
1946	129,701	9,292	13,958	— 827.5	—.08906
1947	160,134	7,857	20,381	— 469.5	—.05976
1948	200,340	8,353	23,984	+ 253.0	+.03029
1949	192,458	8,363	23,013	— 648.0	—.07748
1950	224,810	7,057	31,856	+ 723.0	+.10245
1951	183,685	9,809	18,726	— 480.0	—.04893
1952	192,234	6,097	31,529	—2997.5	—.49164
1953	138,918	3,814	36,423	— 275.5	—.07223
1954	138,623	5,546	24,995	+2040.5	+.36792
1955	140,581	7,895	17,806		
Sums—Sumas 1935-1944		100,289	77,290		—.11520
Sums—Sumas 1945-1954		75,700	234,242		—.37665

TABLE 2. Successive approximations for parameters.

TABLA 2. Aproximaciones sucesivas para los parámetros.

a	M	$1/k_2$
6.38301	11,239	
		25,462
6.11229	11,246	
		26,277
6.10362	11,246	
		26,275
6.10366	11,246	

TABLE 3. Table of values of $1/k_2$ and corresponding values of instantaneous rate of fishing mortality and annual rate of fishing mortality at $F = 25{,}000$ days.

TABLA 3. Tabla de valores de $1/k_2$, las correspondientes tasas instantáneas de mortalidad por pesca y las tasas anuales de mortalidad por pesca, para $F = 25{,}000$ días.

$1/k_2$	Instantaneous fishing mortality rate k_2F	Annual fishing mortality rate $1-e^{-k_2F}$
$1/k_2$	Tasa instantánea de mortalidad por pesca k_2F	Tasa anual de mortalidad por pesca $1-e^{-k_2F}$
70,093	.35667	.300
48,940	.51083	.400
36,067	.69315	.500
27,284	.91629	.600
26,275	**.95147**	**.614**
20,765	1.20397	.700
15,533	1.60944	.800
10,857	2.30259	.900

TABLE 4. Estimation of equilibrium catches for $1/k_2 = 26{,}275$.

TABLA 4. Estimación de las pescas de equilibrio para $1/k_2 = 26{,}275$.

Year Año	C	$\bar{U}$	ΔP $(=1/k_2 \Delta U)$	C_e $(=C+\Delta P)$	$C_e/\bar{U}$
1935	72,294	11,484	+15,896	88,190	7679
1936	78,353	11,571	− 4,835	73,518	6354
1937	91,522	11,116	− 1,419	90,103	8106
1938	78,288	11,463	− 7,725	70,563	6156
1939	110,417	10,528	−11,219	99,198	9422
1940	114,590	10,609	−32,975	81,615	7693
1941	76,841	8,018	−46,888	29,953	3736
1942	41,965	7,040	+ 5,557	47,522	6750
1943	50,058	8,441	+39,137	89,195	10567
1944	64,094	10,019	+14,070	78,164	7802
1945	89,194	9,512	− 9,551	79,643	8373
1946	129,701	9,292	−21,743	107,958	11618
1947	160,134	7,857	−12,336	147,798	18811
1948	200,340	8,353	+ 6,648	206,988	24780
1949	192,458	8,363	−17,026	175,432	20977
1950	224,810	7,057	+18,997	243,807	34548
1951	183,685	9,809	−12,612	171,073	17440
1952	192,234	6,097	−78,759	113,475	18612
1953	138,918	3,814	− 7,238	131,680	34525
1954	138,623	5,546	+53,614	192,237	34662

TABLE 5. Estimates of parameters for various values of $1/k_2$.

TABLA 5. Estimación de los parámetros para varios valores de $1/k_2$.

f (Annual fishing mortality rate at 25,000 days fishing)	$1/k_2$	β^*	α^*	$M^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$	Variance[1] $s^2_{n-3}(\beta^*)$	C_e Maximum (10^3 pounds)	F at C_e Maximum
f (Tasa de mortalidad anual por pesca al nivel de 25,000 días de actividad)	$1/k_2$	β^*	α^*	$M^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$	Variancia[1] $s^2_{n-3}(\beta^*)$	C_e Maximum 10^3 libras	F al nivel del Maximum de C_e
.300	70,093	— 9.8400	100,441	10,207	$422{,}777\times10^3$	256,290	50,220
.400	48,940	—11.3632	114,366	10,065	$633{,}525\times10^3$	287,785	57,183
.500	36,067	— 7.8155	83,462	10,679	$340{,}230\times10^3$	222,822	41,731
.600	27,284	— 6.0903	68,497	11,247	$146{,}959\times10^3$	192,598	34,248
.614	**26,275**	**— 6.0884**	**68,505**	**11,252**	$\mathbf{145{,}908\times10^3}$	**192,709**	**34,252**
.700	26,765	— 5.9568	67,481	11,328	$134{,}781\times10^3$	191,999	33,740
.800	15,533	— 5.9708	67,735	11,344	$109{,}814\times10^3$	192,090	33,867
.900	10,857	— 6.7646	74,835	11,063	$168{,}147\times10^3$	206,980	37,417

[1] See Bartlett (1949) page 209.

[1] Ver Bartlett (1949) página 209.

UN ESTUDIO DE LA DINAMICA DE LA PESQUERIA DEL ATUN ALETA AMARILLA EN EL OCEANO PACIFICO ORIENTAL TROPICAL

por

Milner B. Schaefer

INTRODUCCION

El problema central en que está abocado el personal de la Comisión Interamericana del Atún Tropical es el de la determinación de los efectos producidos por la pesca en las poblaciones de atunes del Océano Pacífico Oriental Tropical, a fin de poder estimar la relación entre la intensidad de la pesca y el rendimiento sostenido de cada una de las especies a diferentes niveles de intensidad pesquera. Sobre estas bases, se puede evaluar tanto el máximo rendimiento sostenido como la intensidad de la pesca que le corresponde, aparte de precisar la situación actual de la pesquería respecto de la condición del máximo rendimiento.

Una manera de hacer estas estimaciones consiste en analizar los datos estadísticos sobre la intensidad del esfuerzo pesquero y el monto de las pescas resultantes, a lo largo de una serie de años que abarque diferentes niveles de intensidad pesquera. Datos de esta naturaleza han sido compilados sobre el atún aleta amarilla y el barrilete desde 1934 haste 1954 inclusive, y publicados en fecha reciente por Shimada y Schaefer (1956). Dichos autores llegaron a la conclusión de que la intensidad de pesca durante esta serie de años había sido de magnitud suficiente como para tener un efecto pronunciado en el grado de abundancia del atún aleta amarilla, y que, durante los años de pesca más intensa, la pesquería se había acercado al nivel del máximo rendimiento sostenido.

A fin de obtener estimaciones más exactas de la relación entre el esfuerzo de pesca, la abundancia de la población y el monto de la pesca, los datos de Shimada y Schaefer, más los correspondientes a 1955, serán examinados, en lo que sigue, a la luz de una teoría de la dinámica de las poblaciones, cuyos principios fundamentales ya fueron analizados por Schaefer (1954). Ha sido también necesario ampliar los conceptos teóricos originales.

AGRADECIMIENTOS

Los datos básicos para este estudio fueron extraídos de los detallados registros que de las operaciones y montos de las pescas llevan los patrones de las embarcaciones y otros miembros de la industria pesquera del atún. Hacemos nuevamente pública nuestra gratitud a estas personas por su valiosa e indispensable cooperación.

DATOS BASICOS

En este estudio consideraremos como una entidad biológica única e independiente el atún aleta amarilla que alimenta la pesquería frente al sector de las costas americanas que se extiende desde Baja California hasta el norte del Perú. Que estos peces son diferentes de los de las poblaciones más occidentales del Pacífico Central y de la Polinesia Suroriental, ha sido puesto de manifiesto con datos morfométricos (Godsil y Greenhood 1951, Royce 1953, Schaefer 1952, 1955); con los resultados de la marcación de peces (Shimada y Schaefer 1956, y datos inéditos) y por los cambios de la población provocados por las variaciones del esfuerzo de pesca (Shimada y Schaefer 1956, Broadhead 1957). Conviene decir, sin embargo, que aún no se ha demostrado que la población *dentro* de la región americana de la pesquería es homogénea. Por lo tanto, el presente estudio es, hasta donde pueda ser válida la salvedad anterior, provisional.

Los datos sobre la pesca total se recolectan de toda la región batida por la pesca. La abundancia se mide mediante la pesca por unidad de esfuerzo pesquero de un número muy elevado de clípers atuneros, que en toda el área cubierta por sus actividades utilizan el método de pesca con carnada viva, siendo la unidad de medida la pesca por día de actividad de una embarcación de la categoría de tamaño estándar, con una capacidad de almacenaje de 200 a 300 toneladas de atún congelado. La intensidad total de pesca, que se expresa en equivalentes de días de pesca por embarcación estándar, se calcula para toda la pesquería dividiendo la pesca estandarizada por día de actividad entre el total de la pesca efectuada por las embarcaciones de todos los tipos. No es menester entrar en los detalles de la recolección, compilación y estandarización de los datos porque ya Shimamda y Schaefer (1956) se ocuparon de dicho asunto. En la Tabla 1 se han reproducido los datos para la serie de 1934 a 1954 que aparecieron en la Tabla 19 de la publicación aludida. A estos datos se han añadido esta vez los correspondientes al año 1955.

MODELO MATEMATICO

Descripción del modelo

El modelo matemático empleado en el presente estudio es, fundamentalmente, el mismo que fuera ofrecido por Schaefer en una publicación precedente (1954), si bien es cierto que esta vez hemos introducido algunas modificaciones en la nomenclatura. Además, la teoría ha sido también ampliada a fin de hacer posible el obtener estimaciones de todas las constantes esenciales a base únicamente de los datos de pesca, sin tener que recurrir a los datos de marcación de peces para estimar la mortalidad, como fué el caso en la publicación anterior.

El concepto fundamental es que cada nivel de la población de atunes de tamaño comercial posee, en promedio, una cierta capacidad para aumentar

su peso (**tasa de incremento natural**). Los niveles de población en cuestión pueden variar entre cero y el máximum que bajo condiciones mesólogicas promediales es capaz de mantener el sector oceánico objeto del presente estudio. Desde luego, la tasa de incremento natural es cero cuando el nivel de la población es cero, y es también cero, en promedio, cuando la población ha alcanzado su máximo nivel. Ahora bien, si a cualquier nivel de la población la pesquería explota una cantidad igual a la tasa de incremento natural, no se registrará cambio alguno en la magnitud de la población. Por otra parte, si lo explotado rebasa el incremento natural, la población disminuirá en un monto igual al del rebase. En el caso inverso, esto es cuando la cantidad explotada es inferior al incremento natural, la población habrá de aumentar. Se comprende, por lo tanto, que se haya convenido en denominar pesca de equilibrio a aquella magnitud de explotación equivalente a la tasa de incremento natural, puesto que en dichas condiciones la cantidad explotada está en equilibrio con el poder de crecimiento de la población. Esto puede expresarse simbólicamente como sigue:

$$\Delta P = C_e - C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

donde:

ΔP es el cambio en el peso total de la población de atunes de tamaño comercial durante el año.

C_e es la pesca de equilibrio (equivalente a la tasa anual de incremento natural).

C es la pesca durante el año.

Para la relación general entre la población y la pesca de equilibrio (o tasa anual de incremento natural) se puede escribir:

$$C_e = k_1 \bar{P}\ f(\bar{P}) + \eta \bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

donde:

$\bar{P}$ es la población anual media.

k_1 es una constante.

η es una variable fortuita.

$f(\bar{P})$ es una función univalente de $\bar{P}$. Su valor es cero en el máximo nivel de la población y aumenta al disminuir el nivel de ésta. Es, por consiguiente, un término negativo auto-regulado, necesario para describir el balance natural, de ajuste automático, que existe entre la tasa de incremento natural y la capacidad de carga de un ambiente limitado (Hutchinson, 1954).

La suposición más sencilla que se puede hacer sobre la forma de $f(\bar{P})$ (Moran 1954) es la de que su variación es lineal respecto de $\bar{P}$, es decir:

$$f(\bar{P}) = L - \bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

donde:

L es la magnitud máxima de la población.

De modo que entonces:

$$C_e = k_1\bar{P}\,(L - \bar{P}) + \eta\bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Más adelante habremos de mostrar que esta suposición parece ser congruente con los datos para el atún aleta amarilla dentro de la amplitud de niveles de población que fueron observados. Desde luego, es posible que la relación lineal postulada para $f(\bar{P})$ no sea adecuada a niveles de población diferentes de los observados; empero, el reconocimiento de esta posibilidad no justificaría el proponer un modelo matemático más complejo que el que satisface los datos actualmente disponibles.

Enseguida, ateniéndonos a la suposición usual de que la pesca por unidad de esfuerzo es proporcional a la magnitud de la población, ponemos:

$$U = k_2P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

donde:

U es la pesca por unidad de esfuerzo.

k_2 es una constante (la tasa instantánea de la mortalidad causada por unidad de esfuerzo pesquero).

De lo dicho se sigue que:

$$\bar{U} = k_2\bar{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

y

$$\Delta U = k_2\Delta P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

donde:

$\bar{U}$ es el promedio anual de la pesca por unidad de esfuerzo.

ΔU es el cambio ocurrido, durante el año, en la pesca por unidad de esfuerzo.

Substituyendo en (1) y (4) y englobando algunas constantes a fin de hacer más simple su representación, obtenemos:

$$C_e = C + \frac{1}{k_2}\,\Delta U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

y

$$C_e = a\bar{U}\,(M - \bar{U}) + \epsilon\bar{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

donde a y M son constantes y ϵ es una variable fortuita, por lo que:

$$1/k_2\,\frac{\Delta U}{\bar{U}} = a\,(M - \bar{U}) - \frac{C}{\bar{U}} + \epsilon \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

y si: $\Delta U = 0$ y $\epsilon = 0$ se tiene:

$$\frac{C_e}{\bar{U}} = a\,(M - \bar{U}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

que da lo que Schaefer (1954) denomina la "línea de las condiciones de equilibrio". Esta describe la relación *promedial* entre el esfuerzo pesquero $(F = C/\bar{U})$ y la abundancia de la población $(\bar{U})$ cuando la pesca anual se encuentra en balance con la tasa anual de incremento natural.

ΔP puede estimarse para un determinado año, i, como ya lo hiciera Schaefer (1954), con la fórmula siguiente:

$$\Delta P_i = \frac{\bar{P}_{i+1} - \bar{P}_{i-1}}{2}$$

y de modo semejante

$$\Delta U_i = \frac{\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_{i-1}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

La ecuación (10), usando ΔU estimado con (12), expresa la relación teórica entre la abundancia de la población, determinada a base del promedio de pesca por día de actividad $(\bar{U})$, el esfuerzo de pesca total $(C/\bar{U} = F)$, y el cambio ocurrido en la abundancia de la población (ΔU) durante el curso del año. Es, pues, este modelo el que se habrá de aplicar a los datos de la Tabla 1 con el objeto de obtener estimaciones de los parámetros que rigen para la pesquería del atún aleta amarilla del Pacífico Oriental.

Algunas suposiciones implícitas

La ley simple que relaciona la tasa de incremento natural de la población y la magnitud de ésta, tal como se expresa en la ecuación (2), implica ciertas suposiciones referentes a las poblaciones ictiológicas, que no son del todo realistas y que, por lo mismo, limitan su utilidad cuando el grado de su anomalía respecto de la realidad es lo suficientemente grande. Aunque en el caso de la pesquería del atún aleta amarilla la anomalía en cuestión, como se aclarará más adelante, no parece ser de grado serio, vale la pena que nos detengamos a considerar estas suposiciones implícitas que pueden limitar la aplicación general del modelo propuesto, y la correspondiente necesidad de usarlo con cuatela. Algunos de estos asuntos han sido también examinados por Gulland (1955) y Watt (1956).

Existen dos suposiciones implícitas referentes a la población en sí misma, a saber:

1) Que la tasa de incremento natural responde inmediatamente a los cambios en la densidad de la población. Esto equivale a decir que se prescinden de los efectos retardados que puedan tener los cambios de densidad de la población sobre la tasa de incremento natural,

como por ejemplo el retardo que pueda existir entre el desove y el reclutamiento de la progenie resultante en el stock susceptible de pesca.

2) Que la tasa de incremento natural correspondiente a un peso dado de la población es independiente de la composición por edades de dicha población.

Ahora bien, ninguna de estas dos condiciones se cumplen exactamente en las poblaciones de peces, y, en verdad, en ninguna población de organismos multicelulares. Ciertamente los efectos de la competencia intraespecífica entre individuos entre el estado de huevo y la edad del reclutamiento implican la existencia de un periodo interino. También pueden existir algunos efectos retardados de la densidad de la población sobre la mortalidad y crecimiento de los individuos susceptibles de ser capturados. En lo que atañe a la segunda suposición, se sabe que factores tales como la fecundidad, el crecimiento y la mortalidad son todos ellos, en algún grado, dependientes de la edad de los individuos así como de la densidad de la población, de donde se sigue que la potencia de crecimiento de una población no sólo depende de la biomasa total sino también de la forma como están distribuídas las edades de los individuos en la población.

Debiera advertirse, sin embargo, que si la ecuación (2) es aplicada a estados de equilibrio constante, las suposiciones mencionadas son innecesarias. Si los datos fueran usados tan sólo para aquellos períodos en que el esfuerzo pesquero y la población se hallaran en condición de equilibrio constante, la estructura de la población, en lo que respecta a las edades de los individuos integrantes, vendría definida inequivocadamente por su propia biomasa. Igualmente, puesto que al estado de equilibrio constante la población durante cualquier año es, en promedio, de la misma magnitud y composición de edades que durante cualquier año siguiente, se elimina de por sí el efecto retardado sobre el reclutamiento, etc. Empero, la realidad es que las pesquerías muy rara vez se hallan en estados de equilibrio constante, de modo que debemos enfrentarnos con fases transitorias en las que los efectos mencionados están presentes.

A este respecto es importante tener en cuenta que los cambios en el esfuerzo de pesca de las pesquerías comerciales son, a menudo, de naturaleza gradual, de manera que el desplazamiento de la condición de equilibrio no es grande. Puede verse en la Tabla 1 que en el caso del atún aleta amarilla tuvieron lugar cambios más o menos pronunciados tanto en el esfuerzo pesquero como en la abundancia de la población en el curso de unos cuantos años, especialmente a comienzos de la Sequnda Guerra Mudial, inmediatamente desqués de ella, y nuevamente en los últimos años de la serie examinada. Sin embargo, esta pesquería depende solamente de peces de unas pocas edades de las cuales la menor parece corresponder a peces de un año de edad. Por consiguiente, la renovación de la población es muy rápida si

se la compara con muchas pesquerías de latitudes mayores que explotan peces cuyas edades acusan una extensión mayor y en las cuales la edad de reclutamiento es más avanzada. Esto quiere decir, entonces, que aún en el caso de que ocurran grandes cambios (pero no excesivos) en el esfuerzo de pesca, no se producirán desplazamientos considerables del estado de equilibrio constante de la población del atún aleta amarilla del Pacífico Oriental.

El que el atún aleta amarilla se reclute al año de edad, alcance muy pronto su madurez sexual (algunos probablemente al año y la mayoría a los dos), y tenga una vida promedio muy corta, implica que el ínterin entre el desove y el reclutamiento es pequeño. De igual manera, los efectos producidos por la pesca en la composición de edades de la población del atún aleta amarilla serán de menor importancia que en las especies de mayor longevidad.

La tasa de incremento natural de una población de peces es determinada no sólo por la magnitud de la población y la composición de edades de la misma, sino también por muchos factores mesológicos. Las variaciones de estos factores producirán desviaciones del valor de la tasa de incremento natural que ocurrirían bajo condiciones promedio del ambiente. Al aplicar nuestro modelo matemático a los datos de la pesquería suponemos que los efectos que sobre el reclutamiento, supervivencia y crecimiento tienen los variables factores mesológicos son de carácter fortuito, o que, por lo menos, no muestran correlación con los cambios de la población debidos a cambios en la intensidad de la pesca. En otras palabras, presumimos que la esperanza matemática de ϵ en la ecuación (10) (que incluye los efectos de las variaciones mesológicas, así como las diversas clases de errores de medida), es cero.

Las variaciones del medio ambiente pueden también afectar el comportamiento de los peces con el resultado de que su accesibilidad a las artes de pesca puede aumentar o disminuir. En este caso, como en el anterior, se supone implícitamente que los efectos de los factores ambientales sobre el grado de vulnerabilidad de la población ante la pesca son de carácter fortuito, o que, por lo menos, no están correlacionados con los cambios en el esfuerzo de pesca, de modo que la esperanza matemática de k_2 permanece inalterable, cualquiera que fuere el nivel del esfuerzo pesquero.

Desde luego, bien puede ocurrir que los cambios en los importantes factores del medio ambiente exhiban un carácter periódico, que el período en cuestión sea largo en comparación con el lapso abarcado por los datos disponibles, y que el esfuerzo pesquero esté correlacionado, fortuitamente o en alguna otra forma, con los cambios del medio ambiente. De ocurrir esto, incurriríamos en un error al imputar los cambios en la magnitud de la población a las variaciones del esfuerzo de pesca. En el caso del atún aleta amarilla, aunque no decimos que sea imposible que hayamos incurrido en dicho error, sí creemos que la probabilidad del mismo sea escasa, en vista

de que se registraron considerables cambios en el esfuerzo pesquero durante 1941-1944 como consecuencia de la guerra, y nuevamente otros cambios en 1954 y 1955 como resultado de la competencia provocada por importaciones. Es, pues, poco probable que los cambios concomitantes en la abundancia de la población del atún aleta amarilla sean atribuíbles, en ambos casos, a variaciones mesológicas que, por pura obra del azar, ocurrieran al mismo tiempo.

Finalmente, al aplicar el modelo a los datos, es menester que los cambios en el nivel de la población correlativos a los cambios en el esfuerzo de pesca sean lo suficientemente grandes con respecto a las variaciones producidas por otras causas, para permitir la determinación de los parámetros de la ecuación (10) de modo fidedigno y útil. O, para decirlo en términos de la teoría de la información, (Wiener 1948, pag. 78) la seña del mensaje debe ser de potencia adecuadamente más grande que la del ruido del fondo, si se ha de derivar información en grado útil.

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS

De la ecuación (10) deducimos, para cualquier año, i:

$$1/k_2 \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} + \epsilon \quad . \quad . \quad (13)$$

siendo $\Delta\bar{U}_i$ estimado con (12).

Sumando para un período de n años, obtenemos para la suma teóricamente esperada:

$$1/k_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = \sum_{i=1}^{n} a(M - \bar{U}_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\bar{U}_i} \quad . \quad (14)$$

puesto que el valor esperado de $\sum\epsilon$ es cero.

La ecuación (14) es equivalente a:

$$1/k_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = naM - a \sum_{i=1}^{n} \bar{U}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\bar{U}_i} \quad . \quad (15)$$

En la Tabla 1 se han tabulado los valores de C, $\bar{U}$, $C/\bar{U}$, ΔU y $\Delta U/\bar{U}$ para cada año de la serie en estudio. Las series de valores de $\bar{U}$ y $C/\bar{U}$ se muestran también gráficamente en la Figura 1, y los correspondientes a C y $C/\bar{U}$ en la Figura 2.

Puesto que, en promedio, los valores positivos de ΔU están asociados con montos de pesca inferiores a la pesca de equilibrio que corresponde a $\bar{U}$, y vice versa, se puede escribir para (14):

$$1/k_2 \sum_i \left| \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} \right| = \sum_i \left[a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} \right]_{\Delta U_i > 0} - \sum_i \left[a(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} \right]_{\Delta U_i < 0} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Esto es, cuando se suman los valores absolutos de $\frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i}$ en el miembro de la izquierda, al de la derecha hay que *añadirle* $\left[a\,(M - \bar{U}_i) - \frac{C_i}{\bar{U}_i} \right]$ en aquellos años en que ΔU_i es positivo y *substraerle* dicha cantidad cuando ΔU_i es negativo.

Para hacer una estimación de los parámetros del modelo con los datos de la Tabla 1, hemos utilizado las ecuaciones (15) y (16) en la forma de sucesivas aproximaciones.

Computando con (15) las sumas para los períodos 1935-1944 y 1945-1954 se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} 1/k_2\,(-.11520) &= 10\,aM - a\,(100{,}289) - 77{,}290 \\ 1/k_2\,(-.37665) &= 10\,aM - a\,(\ 75{,}700) - 234{,}242 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Puesto que en cada uno de estos períodos el cambio *neto* de $\Delta U/\bar{U}$ fué pequeño, como primera aproximación podemos prescindir de los términos de los miembros de la izquierda de estas ecuaciones y resolviendo para a y M se obtiene:

$$a = 6.38301$$
$$M = 11{,}239$$

Con estos valores de a y M se procede a computar los términos de la ecuación (16) obteniendo para $1/k_2$, en primera aproximación:

$$1/k_2\,(2.11843) = 53{,}940$$

o sea,

$$1/k_2 = 25{,}462$$

Poniendo en (17) este valor de $1/k_2$ se logra en segunda aproximación para a y M

$$a = 6.11229$$
$$M = 11{,}246$$

Con estos nuevos valores de a y M se vuelve a determinar los términos de la ecaución (16) y luego se despeja $1/k_2$ obteniéndose en segunda aproximación:

$$1/k_2 = 26{,}277$$

Continuando con este procedimiento se obtuvieron las sucesivas aproximaciones tabuladas en la Tabla 2.

Se puede ver que las aproximaciones convergen muy rápidamente. Las estimaciones mejores de los parámetros son:

$$a = 6.10366$$
$$M = 11{,}246$$
$$1/k_2 = 26{,}275$$

Para la línea de las condiciones de equilibrio, representada por la ecuación (11) que relaciona el esfuerzo de pesca con la densidad media de la población cuando la pesca se encuentra en equilibrio con la tasa de incremento natural, tenemos:

$$F = \frac{C_e}{\bar{U}} = 6.10366\ (11{,}246 - \bar{U}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

de donde se desprende que:

$$C_e = 6.10366\ (11{,}246 - \bar{U})\ \bar{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ecuación que expresa la relación entre la densidad de la población y la pesca promedio de equilibrio.

También:

$$C_e = \frac{F}{6.10366}\ (6.10366 \times 11{,}246 - F)$$

o sea:

$$C_e = .16384\ (68{,}641 - F)\ F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

que expresa la relación existente entre el esfuerzo pesquero y la pesca promedio de equilibrio.

Estas relaciones funcionales se muestran en forma gráfica en la Figura 1 con la línea a trazos rotulada: "estimated line of equilibrium". En este gráfico los valores de F ó $C/\bar{U}$ se dan en las abscisas y los de $\bar{U}$ en las ordenadas. Las hipérbolas equiláteras indican valores de la pesca total, correspondientes a los productos de los valores en las ordenadas por los correspondientes en las abscisas; las diferentes magnitudes de pesca total para las cuales se trazaron las hipérbolas se pueden ver en los extremos superiores de éstas. Los valores de la pesca promedio de equilibrio están representados por las intersecciones de la línea a trazos con las hipérbolas, para los respectivos valores de F ó $\bar{U}$.

El hecho de haberse trazado las hipérbolas para valores de C que no constituyen una serie lineal, dificulta la interpolación ocular. Por lo tanto,

con el objeto de facilitar la aprehensión visual de la relación entre el esfuerzo pesquero y la pesca promedio de equilibrio, se ha representado en la Figura 2 la relación (20), junto con los valores observados del esfuerzo pesquero y la pesca total para el período de 1934 a 1955 inclusive.

Se desprende de las ecuaciones (18) a la (20) y de las Figuras 1 y 2, que la aplicación del modelo matemático a los datos del atún aleta amarilla da un promedio de máxima pesca de equilibrio anual de alrededor de 193 millones de libras, que corresponde a un promedio de intensidad de pesca anual de 34,300 días y a un promedio de pesca por unidad de esfuerzo de 5623 libras por día de pesca estándar.

Efectos de la variación de $1/k_2$

La constante k_2, cuya estimación se hizo anteriormente, es la tasa instantánea de la mortalidad por pesca en términos de una unidad de esfuerzo pesquero. A un valor de $1/k_2 = 26{,}275$ corresponde una $k_2 = 38.059 \times 10^{-6}$.

Esto indica que para una magnitud de esfuerzo pesquero de 25,000 días, que es poco más o menos el valor del esfuerzo en los últimos años, la tasa instantánea de mortalidad por pesca es de 0.9515, la cual corresponde a una tasa de mortalidad anual de 0.614.

Surge, desde luego, el problema de determinar con que grado de precisión ha sido estimada la constante $1/k_2$, y el efecto que este grado de precisión tiene en el cálculo de los restantes parámetros de la ecuación del modelo propuesto. Para analizar este asunto, hemos dado a $1/k_2$ una serie de valores *supuestos,* correspondientes a una amplitud de tasas anuales de mortalidad por pesca (al nivel de 25,000 días de pesca) comprendida entre los valores extremos 0.300 y 0.900, calculando entonces las otras constantes del modelo. En la Tabla 3 se dan los valores supuestos para $1/k_2$, y las correspondientes tasas instantáneas y anuales de la mortalidad por pesca, al nivel de las 25,000 unidades de esfuerzo.

El método usado en los cálculos es similar al que presentara anteriormente Schaefer (1954). Para cada valor de $1/k_2$, se computa, año por año, el valor de $\Delta P = 1/k_2 \Delta U$. Enseguida, usando la ecuación (1), se obtiene, para cada año, el valor de C_e mediante la siguiente relación:

$$C_e = C + \Delta P$$

Dividiendo la C_e de cada año por $\bar{U}$, se determinan las series de valores $C_e/\bar{U}$. A las series de $C_e/\bar{U}$ y $\bar{U}$ se les ajusta la ecuación:

$$F = \frac{C_e}{\bar{U}} = \alpha(M - \bar{U})$$

o

$$F = \beta\bar{U} + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

en la que

$$\beta = -a$$
$$_a = aM$$

Esto puede ilustrarse para el caso en que $1/k_2 = 26{,}275$ (que es el valor que se halló para esta constante en la sección precedente). En la Tabla 4 se ofrecen los valores calculados para C_e y $C_e/\bar{U}$ para cada año. Los valores de $\bar{U}$ y de $C_e/\bar{U}$ también se presentan gráficamente en la Figura 3.

Al ajustar a estos datos una ecuación de la forma (21), debiera tenerse presente en todo momento que lo que se persigue es obtener estimaciones de los parámetros de la relación funcional, o estructural, entre las dos variables cuando ambas están sujetas a errores librados al azar. Esto, como lo han mostrado Wald (1940), Bartlett (1949) y otros, no es lo mismo que el problema de predecir el valor de una variable cuando se conoce el de la otra. En este último caso procede emplear el método de los cuadrados medios para hallar la regresión de una variable sobre la otra, pero no es necesariamente lo que debe hacerse cuando de lo que se trata es de determinar la relación estructural.

Para estimar los parámetros de una relación funcional, Wald (1955) propuso un método consistente en dividir los datos en dos grupos para luego determinar la pendiente de la línea recta que pase por los puntos definidos por las coordenadas medias de uno y otro grupo. La relación funcional vendría indicada entonces por la línea, con dicha pendiente, que pasara por las coordenadas medias de todos los puntos.

Bartlett (1949) presentó una modificación del método Wald que ofrece la ventaja de hacerlo más exacto. La modificación consiste en dividir los n puntos en tres grupos, de tal modo, que los grupos de los extremos estén constituídos por un número igual de puntos, k, y tan cercanos a $n/3$ como sea posible. Para determinar la pendiente se unen con una recta las coordenadas medias de los dos grupos extremos. La relación funcional queda expresada por la línea recta que, con la pendiente hallada, pase por las coordenadas medias de todos los puntos.

En este estudio hemos acogido el método de Bartlett. Los grupos extremos poseen, el uno, los siete valores más altos de $C_e/\bar{U}$, y, el otro, los siete más bajos. La ecuación de la línea resultante provee los valores estimados de los dos parámetros:

$$_a^* = 68{,}505 \qquad \beta^* = -6.0884$$

de modo que

$$M^* = 11{,}252$$

Entonces se tiene que para el valor supuesto de $1/k_2$ la relación funcional es la siguiente:

$$\frac{C_e}{\bar{U}} = 6.0884\ (11{,}252 - \bar{U}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

o

$$\bar{U} = 0.16425\ (68{,}505 - \frac{C_e}{\bar{U}})$$

Esta línea se da en la Figura 3.

Se ve claramente que la relación (22) es prácticamente idéntica a la (18) hallada anteriormente.

Tomando de uno en uno los valores de $1/k_2$ tabulados en la Tabla 3 se han computado las estimaciones de α^* y β^* siguiendo el procedimiento acabado de describir, y los resultados obtenidos se dan en la Tabla 5, al paso que las líneas que representan las relaciones funcionales se pueden ver en la Figura 4, cada una de las cuales ha sido rotulada de acuerdo al valor de f (tasa de mortalidad anual por pesca al nivel de 25,000 unidades de esfuerzo) correspondiente al valor supuesto de $1/k_2$. No aparecen las líneas para $f = 0.614$ y $f = 0.800$ porque ambas caen entre las líneas para $f = 0.600$ y $f = 0.700$ las cuales ya están muy próximas la una de la otra.

En las dos últimas columnas de la Tabla 5 se da también el valor máximo de la pesca promedio de equilibrio y la intensidad de pesca correspondiente a dicha condición de equilibrio, para cada uno de los valores supuestos de la tasa de mortalidad por pesca.

Puede verse por la Figura 4 y la Tabla 5 que, dentro de la gama de valores de $1/k_2$ correspondientes a las tasas de mortalidad anual por pesca (al nivel de 25,000 unidades de esfuerzo) que varían entre 0.6 y 0.8 aproximadamente, se registra muy poca variación en los valores de los parámetros de la línea de las condiciones de equilibrio, y que, además todos los valores de $1/k_2$ analizados producen estimaciones harto similares del máximo nivel de la pesca promedio de equilibrio, así como de la magnitud del esfuerzo pesquero correspondiente. Por lo tanto, parece que, dentro de esta gama de valores de $1/k_2$, las variaciones en los valores de los otros parámetros han sido pequeñas. Sin embargo, con tasas (supuestas) de mortalidad por pesca por debajo de 0.6, los valores de los parámetros de la línea de las condiciones de equilibrio cambian con notable rapidez.

El grado de dispersión de los puntos con respecto a la línea de las condiciones de equilibrio puede evaluarse, en cada caso, mediante la "variancia" ($s^2\ \beta$) computada con la fórmula que aparece en la página 209 de la publicación de Bartlett. Estos valores se dan en la sexta columna de la Tabla 5. Es razonable esperar que la dispersión de los puntos $(C_e/\bar{U},\ \bar{U})$ será mínima cuando el valor de $1/k_2$ se encuentre más próximo al verdadero, y que dicha dispersión crecerá a medida que el valor de $1/k_2$ se aleje más de la realidad. La inspección de los valores tabulados revela que la variancia

más pequeña corresponde a una $f = 0.8$ y que no acusó un gran cambio entre $f = 0.6$ y $f = 0.8$. La variancia aumenta notablemente para valores de f inferiores a 0.6, y también se incrementa considerablemente cuando $f = 0.9$.

Por lo expuesto, parece razonable concluir que: (1) la tasa de mortalidad anual por pesca (al nivel de 25,000 unidades de esfuerzo) está probablemente comprendida entre 0.6 y 0.8; y (2) dentro de esta amplitud de valores de f, los valores de los otros parámetros no están muy afectados por errores en la computación de $1/k_2$.

Por consiguiente, aunque nuestra estimación de $1/k_2 = 26{,}275$ no puede reputarse de ser exacta, dicha falta de precisión no distorsiona en la práctica los parámetros de la línea de las condiciones de equilibrio.

LINEARIDAD DE LA RELACION ENTRE $C_e/\bar{U}$ y $\bar{U}$

En nuestro modelo matemático hemos supuesto (página 271) que, en promedio, para el estado de equilibrio sostenido, existe una relación lineal entre el esfuerzo pesquero y la abundancia de la población.

Con el objeto de examinar la validez de esta suposición, dentro de la gama de valores que se observaron en el esfuerzo pesquero, hemos considerado la serie de valores de $\bar{U}$ y $C_e/\bar{U}$, cuando $1/k_2 = 26{,}275$ (esto es, los puntos de la Figura 3). Aplicando a ellos la prueba "t" de Bartlett (1949, página 211), se encontró que los puntos quedan adecuadamente representados mediante una relación funcional de naturaleza lineal. En consecuencia, no parece haber razón para emplear un modelo más complejo, por lo menos en cuanto a los valores del esfuerzo pesquero y a la abundancia objeto de nuestro estudio.

ESTIMACIONES DEL PROMEDIO DE ABUNDANCIA DE LA POBLACION Y DE LA PESCA DE EQUILIBRIO CORRESPONDIENTES A DIFERENTES NIVELES DE ESFUERZO PESQUERO, Y COMPUTO DE LOS LIMITES DE CONFIANZA DE DICHAS ESTIMACIONES

En lo que antecede nos hemos ocupado de determinar, a base de los datos contenidos en la Tabla 1, los valores de las constantes de la ecuación (11) que representen mejor la relación funcional entre el esfuerzo pesquero, la abundancia media, y el promedio de la pesca, cuando la producción pesquera anual está en equilibrio con la tasa de incremento natural. Ahora vamos a enfocar otro problema algo diferente, esto es, el pronosticar, bajo condiciones de equilibrio, tanto la abundancia media como el promedio de la pesca que corresponderían a valores predeterminados de esfuerzo pesquero.

Para este problema, como ya lo advirtieran Wald (1940) y Bartlett (1949), es apropiado emplear el método de los cuadrados mínimos para hallar la regresión de $\bar{U}$ sobre $C_e/\bar{U}$. Por lo tanto, ajustando a los puntos de

la Figura 3 (Tabla 4) la regresión lineal de los cuadrados medios, obtenemos:

$$\bar{U} = 0.15670\ (71{,}081 - C_e/\bar{U}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

que difiere ligeramente de la relación funcional estimada. Esta línea ha sido también incluída en la Figura 3.

El error estándar de la estimación (desviación estándar de la regresión) es de 1,477 libras.

Los límites de confianza de la estimación del valor medio de $\bar{U}$, cuando se conoce el esfuerzo pesquero $(C_e/\bar{U})$, han sido calculados, segun el procedimiento descrito por Cramér (1946, página 550), para un nivel de probabilidad de 0.9. También aparecen estos límites de confianza en la Figura 3.

Para cualquier valor de esfuerzo pesquero que se elija, la pesca de equilibrio pronosticable y sus límites de confianza pueden determinarse mediante las hipérbolas equiláteras de la Figura 3, las cuales, como ya se dijo, representan los productos de los valores de las ordenadas por los de las abscisas. Sin embargo, como los valores de la pesca total representados por las hipérbolas de la Figura 3 no están espaciados linealmente, se hace difícil interpolar visualmente. Por esta razón también hemos preparado la Figura 5 que muestra los valores estimados de la pesca de equilibrio y los respectivos límites de confianza del 90 por ciento, para valores de esfuerzo pesquero dados en el eje de las abscisas. En la misma Figura 5 se pueden ver los valores del esfuerzo pesquero y los montos de pesca para cada año de nuestra serie.

La Figura 5 pone en evidencia que el promedio estimado de la máxima pesca de equilibrio (198 millones de libras) corresponde a una intensidad pesquera de 35,540 días de pesca estándar. El máximum del límite superior de confianza (del 90 por ciento) corresponde a 221 millones de libras, y el maximum del límite inferior de confianza a 176 millones, y corresponden a valores de esfuerzo pesquero ligeramente más alto el uno y más bajo el otro, respectivamente.

ESTADO ACTUAL DE LA PESQUERIA

El análisis hecho en las líneas que anteceden muestra que es probable que el máximo promedio de la pesca de equilibrio del atún aleta amarilla ocurra al nivel de unos 35,000 días de esfuerzo pesquero estándar, y que dicho máximo sea, aproximadamente, de 195 millones de libras. La citada magnitud de esfuerzo pesquero casi fué alcanzada en los años 1950, 1952 y 1953. Sin embargo, debido a circunstancias económicas, el esfuerzo pesquero decreció marcadamente en 1954 y 1955. Aunque todavía no disponemos de datos completos para 1956, parece que el esfuerzo pesquero fué de unos 25,000 días estándar. Asímismo, parece poco probable que, dada la magnitud de la flota pesquera actual, se pueda alcanzar el próximo año el nivel de 35,000 días de pesca estándar, aún en el caso de que toda la flota trabajara al máximo.

Parece, por esto, que el actual nivel de esfuerzo pesquero está un poco nivel por debajo del que corresponde al máximo promedio de la pesca de equilibrio, y que probablemente permanecerá en esta condición en el futuro inmediato.

Debiera advertirse que las líneas ajustadas que se dan en las Figuras 1, 2, 3 y 5 han sido extrapoladas en cierta medida. Para verificar la validez de tales extrapolaciones, esto es, para examinar la aplicabilidad del presente modelo matemático a niveles más altos de intensidad de pesca, será necesario contar con datos para valores de esfuerzo pesquero y pesca resultante que sean más grandes que los examinados hasta el presente.

LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA

Bartlett, M. S.

1949 Fitting a straight line when both variables are subject to error. Biometrics, Vol. 5, No. 3, pp. 207-212.

Broadhead, Gordon C.

1957 Changes in the size structure of the yellowfin tuna population of the Tropical Eastern Pacific Ocean from 1947-1955. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull., Vol. II, No. 1, pp. 1-20.

Cramér, H.

1946 Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, Princeton, N. J., 575 pp.

Godsil, H. C., and E. C. Greenhood

1951 A comparison of the populations of yellowfin tuna, *Neothunnus macropterus,* from the Eastern and Central Pacific. Cal. Div. Fish and Game, Fish. Bull. No. 82, 33 pp.

Gulland, J. A.

1955 Review of Schaefer (1954), Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm. Vol. 1, No. 2. Cons. Perm. Int. Expl. Mer., Journal, Vol. 20, No. 3, pp. 330-332.

Hutchinson, G. E.

1954 Theoretical notes on oscillatory populations. Jour. Wildlife Management, Vol. 18, No. 1, pp. 107-108.

Moran, P. A. P.

1954 The logic of the mathematical theory of animal populations. Jour. Wildlife Management, Vol. 18, No. 1, pp. 60-66.

Royce, W. F.

1953 Preliminary report on a comparison of the stocks of yellowfin tuna.
Proc. Indo-Pacific Fish. Council, 1952, Section II, pp. 130-145.

Schaefer, M. B.

1952 Comparison of yellowfin tuna of Hawaiian waters and of the American West Coast.
U. S. Fish and Wildlife Service, Fish. Bull. No. 72, Vol. 52, pp. 353-373.

1954 Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries.
Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull., Vol. 1, No. 2, pp. 26-56.

1955 Morphometric comparison of yellowfin tuna from Southeast Polynesia, Central America, and Hawaii.
Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull., Vol. 1, No. 4, pp. 90-136.

Shimada, B. M. and M. B. Schaefer

1956 A study of changes in fishing effort, abundance, and yield for yellowfin and skipjack tuna in the Eastern Tropical Pacific Ocean.
Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull., Vol. 1, No. 7, pp. 350-469.

Wald, A.

1940 The fitting of straight lines if both variables are subject to error.
Ann. Math. Stat., Vol. II, pp. 284-300.

Watt, K. E. F.

1956 The choice and solution of mathematical models for predicting and maximizing the yield of a fishery.
Jour. Fish. Res. Bd. Canada, Vol. 13, No. 5, pp. 613-645.

Wiener, N.

1948 Cybernetics, or control and communication in the animal and the machine.
John Wiley and Sons, New York, 194 pp.